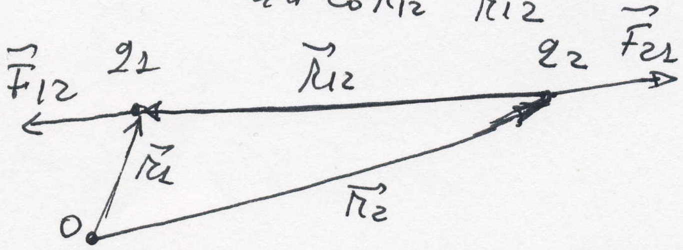
5. ELEMENTE DE ELECTRODINAMICĂ CLASICĂ

5.1. Electrostatica

Electrostatica studiază interacția sarcinilor electrice aflate în repaus.

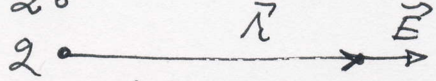
Forța de interacție dintre două sarcini punctiforme a fost stabilită de Coulomb și are forma

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\vec{F}_{21}, \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad (1)$$



Alegând originea sistemului de referință în sarcina q și alegând o sarcină de probă arbitrară $q_0 > 0$ cu care aceasta interacționează putem defini vectorul intensitate câmp electric $\vec{E}$ prin

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{q_0} \frac{q q_0}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



Obținem pentru o sarcină punctiformă în vid

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \qquad (2)$$

Pe baza principiului IV al dinamicii (superpoziției) intensitatea câmpului electric creat de mai multe sarcini punctiforme ~~este~~

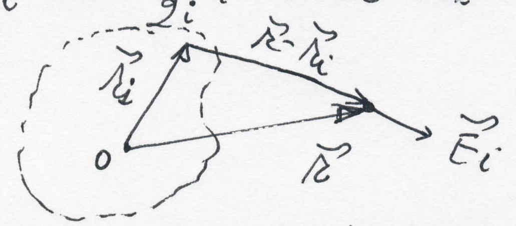
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \qquad (3).$$

Dacă avem o distribuție continuă de sarcini într-un volum V, atunci trebuie să introducem noțiunea de densitate de sarcină electrică

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad dq \text{ sarcina în volumul elementar } dV \qquad (4)$$

Intensitatea creată de n sarcini punctiforme în punctul $\vec{r}$ este

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i^n \vec{E}_i = \sum_i^n \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \qquad (5)$$



Dacă distribuția este continuă avem $\sum\limits_i^n \to \iiint\limits_V dV$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint\limits_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (6)$$

Arătăm că câmpul electric $\vec{E}$ este conservativ

$$\vec{F} = q_0\vec{E}$$

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}d\vec{r} \qquad (7)$$

Dar $\vec{r}^2 = r^2 \Rightarrow 2\vec{r}\cdot d\vec{r} = 2r\cdot dr$ și din (7) obținem

$$dL = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -d\left(\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) \qquad (8)$$

adică $dL = -dE_p \equiv -dV$, $V = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$

Se alege $V=0$ pentru $r\to\infty \Rightarrow C=0$. Așadar energia potențială a câmpului electrostatic este

$$E_p \equiv V = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (9)$$

Definim potențialul electrostatic prin $\varphi = \frac{V}{q_0}$, și obținem

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (10)$$

Am văzut că $dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dV \Rightarrow q_0\vec{E}\cdot d\vec{r} = -d(q_0\varphi)$

$\Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{r} = -d\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \equiv -\nabla\varphi\cdot d\vec{r}$, de unde avem

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \qquad (11)$$

Să considerăm din nou mai multe sarcini electrice

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = -\sum_{i=1}^{n} \nabla \varphi_i = -\nabla\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\right) = -\nabla \varphi$$

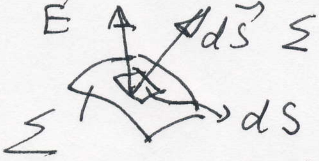
$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|} \qquad (12)$$

Similar cu analiza lui $\vec{E}$ pentru o distribuție continuă de sarcini într-un volum V, avem potențialul creat de aceasta în $\vec{r}$

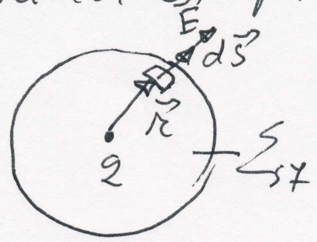
$$\varphi(\vec{r}) = \iiint_V dv' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}\,'|} . \qquad (13)$$

Definim fluxul (intensității) câmpului electric $\vec{E}$ printr-o suprafață Σ prin

$$\Phi_e = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad (14)$$



Să analizăm fluxul lui $\vec{E}$ printr-o suprafață sferică în jurul unei sarcini punctiforme, având-o pe aceasta în centru.



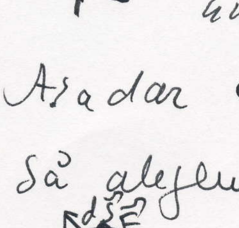
$$\Phi_e\big|_{sf} = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma_{sf}} \vec{E}\, d\vec{S} = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} d\vec{S} =$$

$$= \oint\!\!\!\oint_{\Sigma_{sf}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{r\, dS}{r} , \quad r = \text{constant pe sferă}$$

$$\Rightarrow \Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oint\!\!\!\oint_{\Sigma_{sf}} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Așadar $\Phi_e\big|_{sf} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ (15)

Să alegem o suprafață arbitrară în jurul sarcinii

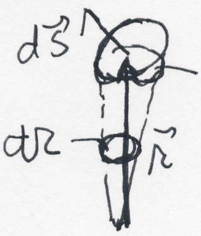


Definim unghiul solid prin

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} , \quad dS \text{ pe o sferă de raza } r.$$

În jurul unui punct unghiul solid total este $\Omega = \dfrac{S_{sf}}{r^2} = \dfrac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$

Cum $d\vec{S}$ este perpendicular pe $\vec{r}$ în cazul sferei putem deduce expresia unghiului solid pentru $d\vec{S}$ arbitrar într-un punct $\vec{r}$.



$$\Omega(\vec{r}) = \frac{dS_{\perp}}{r^2} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2} = \frac{d\vec{S}}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

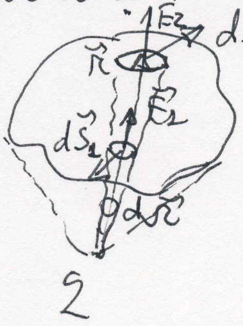
Aşadar pentru o suprafaţă arbitrară închisă

$$\Phi_e = \oiint_{\Sigma} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_{\Sigma} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Aşadar indiferent de poziţia sarcinii în interiorul unei suprafeţe închise (oricare ar fi forma acesteia) fluxul prin acea suprafaţă a lui $\vec{E}$ este

$$\Phi_e|_{\Sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad q \text{ în interior} \tag{16}$$

Să considerăm acum o suprafaţă închisă exterioară sarcinii. Considerăm două suprafeţe elementare aflate pe acelaşi unghi solid $d\Omega$



$$d\Phi_e|_{dS_2} = \vec{E}_2\cdot d\vec{S}_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\cdot\frac{\vec{r}_2}{r_2}\cdot d\vec{S}_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

similar $d\Phi_1|_{dS_1} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$. Semnul minus provine de la orientarea opusă a lui $d\vec{S}_1$.

Prin integrarea (însumarea) pe întreaga suprafaţă închisă există perechi de astfel de termeni ce se compensează ($d\Phi_e|_{dS_2} + d\Phi_e|_{dS_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$) şi fluxul este zero. Aşadar

$$\Phi_e|_{\Sigma} = 0 \qquad q \text{ în exterior} \tag{17}$$

Să considerăm acum n sarcini punctiforme şi o suprafaţă arbitrară închisă.

$$d\Phi_e = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \vec{E}_1\cdot d\vec{S} + \dots + \vec{E}_n d\vec{S} = d\Phi_1 + \dots + d\Phi_n$$

Prin integrare pe suprafaţa închisă obţinem

$$\Phi_e|_{\Sigma} = \Phi_1 + \dots + \Phi_n = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_{i(int)}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i(int)} \tag{18}$$

$$\Rightarrow \Phi_e|_{\Sigma} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Considerăm acum o distribuție continuă de sarcini. Sarcinile interioare sînt doar ale cuprinse în interiorul suprafeței Σ deci în volumul $V(\Sigma)$.

$$q_{int} = \sum q_i^{(int)} = \iiint dq_{int} \equiv \iiint_{V(\Sigma)} \rho \, dV \qquad (19)$$

Suntem acum în situația de a scrie legea lui Gauss (din 18))

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}|_{\Sigma}}{\varepsilon_0} \qquad (20)$$

Ținând cont și de (19) avem forma globală a legii lui Gauss

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V(\Sigma)} \rho \, dV \qquad (21)$$

Folosind acum teorema Gauss-Ostrogradski

$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \, d\vec{S} = \iiint_{V(\Sigma)} (\nabla \cdot \vec{E}) \, dV$ în (21) obținem

$$\iiint_{V(\Sigma)} (\nabla \cdot \vec{E}) \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V(\Sigma)} \rho \, dV$$ care conduce

la forma locală a legii lui Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (22)$$

Pe de altă parte am văzut că $\vec{E} = -\nabla \varphi$. Determinăm $\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$. Așadar

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad (23)$$

Aceste două ecuații ((22) și (23)) sunt ecuațiile fundamentale ale electrostaticii. Rezolvarea lor înseamnă determinarea lui $\vec{E}$ pentru orice distribuție cunoscută de sarcini ρ.

O variantă mai simplă de rezolvare a acestora este folosirea potențialului φ. Am văzut că (23) este echivalent cu $\vec{E} = -\nabla \varphi$ care introdus în (22) conduce la $\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ adică

$$\Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (23^*)$$

Această ecuație reprezintă ecuația lui Poisson.

Evident, după cum am văzut, o soluție a acesteia este de forma (13).

Dacă $\rho = 0$ într-un anumit domeniu din spațiu ecuația lui Poisson trece în ecuația lui Laplace

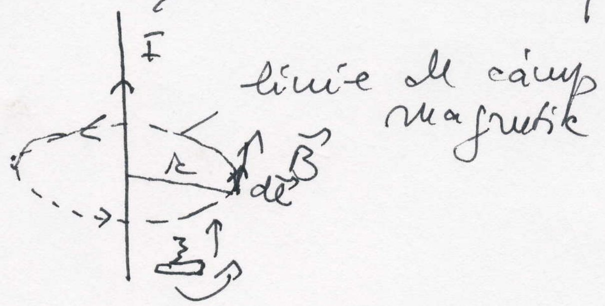
$$\Delta\varphi = 0 \qquad (24)$$

Observație: legea lui Gauss și implicit ecuațiile ce decurg din aceasta sunt valabile datorită proporționalității interacției electrostatice cu $1/r^2$ (fapt fundamental în demonstrațiile anterioare).

5.2. Magnetostatica.

Studiază câmpul magnetic produs de curenți staționari.

Experimental s-a constatat că în jurul unui conductor rectiliniu parcurs de un curent I ia naștere un câmp magnetic, de inducție $\vec{B}$.



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (24')$$

μ_0 - permeabilitatea vidului.

Să determinăm acum circulația vectorului $\vec{B}$ pe o curbă circulară într-un plan perpendicular pe conductor în jurul acestuia. (curba Γ_c)

$$C_c \equiv \oint_{\Gamma_c} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_c} B\,dl = \oint_{\Gamma_c} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\oint_{\Gamma_c} dl ,$$

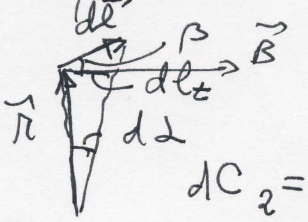
am folosit faptul $r = \text{constant}$ pe cerc.

Obținem așadar că $C_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$ (25)

Să considerăm acum o curbă arbitrară exterioară Γ

Considerăm două segmente infinitezimale de curbă (opuse) întinse de același unghi $d\alpha$

Exprimăm unghiul $d\alpha$ în funcție de $d\vec{l}$ și $\vec{r}$



$$d\alpha = \frac{dl_t}{r} = \frac{dl\cos\beta}{r} \Rightarrow dl\cos\alpha = r\,d\alpha$$

$$dC_2 = \vec{B}_2\cdot d\vec{l}_2 = B_2\, dl_2 \cos\beta = B_2\, r_2\, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} r_2\, d\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha$$

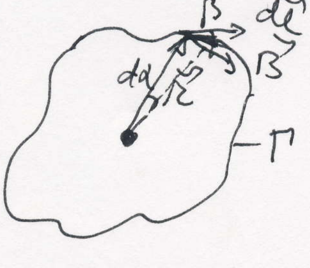
Pentru dC_1 obținem aceiași valoare deoarece $d\vec{l}_1$ subîntinde același unghi $d\alpha$, dar cu semn opus circulația fiind în sens opus. $dC_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha$. Prin integrare se însumează toate perechile opuse de tip dC_2, dC_1 pentru care acum $dC_2 + dC_1 = 0$. Astfel încât obținem

$$C_\Gamma = 0 \qquad I,\ \text{exterior}. \qquad (26)$$

Observație: aceste rezultate se obțin datorită dependenței de tipul $\frac{1}{r}$ a lui $|\vec{B}|$.

Considerăm acum un număr de n curenți. Considerăm o curbă Γ care îi conține pe aceștia în interiorul său.

Pentru început analizăm cazurile descrise anterior și constatăm că dacă un conductor este exterior curbei circulația lui $\vec{B}$ pe acea curbă este nulă. A mai rămas de studiat și cazul în care un conductor parcurs de I este inclus de o curbă arbitrară



$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B}\, d\vec{l} = \oint_\Gamma B\cdot dl\cos\alpha = \oint_\Gamma \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\, d\alpha =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_\Gamma d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I \qquad (27)$$

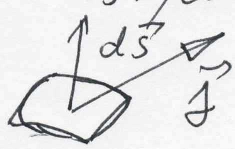
Așadar indiferent de forma curbei

$C_\Gamma = \mu_0 I.$

Pentru n curenți avem $\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i$

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B}\, d\vec{l} = \oint_\Gamma \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i\cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n}\oint_\Gamma \vec{B}_i\cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{m} \mu_0 I|_{int} \qquad (28)$$

Presupunem acum că avem o distribuție continuă de curenți electrici. Definim densitatea de curent $\vec{J}$ astfel. $|\vec{J}| = \frac{dI}{dS_n}$, cu dS_n suprafață elementară normală pe direcția lui $\vec{J}$



Atunci pentru $d\vec{S}$ orientată arbitrar

$$dI = \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

Printr-o suprafață finită Σ curentul total se determină prin integrare

$$I_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{J}\, d\vec{S}$$

În cazul distribuției continue de curenți relația (28) se scrie

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \mu_0 \vec{J}\, d\vec{S} \qquad (29)$$

Aceasta este o formă a legii circuitale a lui Ampere scrisă sub formă globală.

Folosim acum teorema lui Stokes din analiza vectorială

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot dl = \iint_{\Sigma(\Gamma)} (\nabla\times\vec{B})\, d\vec{S} \qquad (30)$$

și din (29) obținem

$$\iint_{\Sigma(\Gamma)} (\nabla\times\vec{B})\, d\vec{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{J}\, d\vec{S}$$

de unde obținem forma locală a legii lui Ampere

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (31)$$

Deoarece câmpul magnetic are liniile de câmp închise fluxul magnetic prin orice suprafață închisă este nul.

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (32)$$

Utilizând teorema Gauss-Ostrogradski (32) ia forma

$$\iiint_{V(\Sigma)} (\nabla\cdot\vec{B})\, dV = 0 \qquad (33)$$

de unde

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad (34)$$

Ecuațiile (31) și (34) reprezintă ecuațiile fundamentale ale magnetostaticii [vidului].

Cunoscând distribuția de curenți $\vec{j}(\vec{r})$ putem determina configurația câmpului magnetic $\vec{B}$.

Să încercăm să rezolvăm această problemă. Ecuația (34) este satisfăcută identic dacă $\vec{B}$ se scrie cu ajutorul unui potențial vector $\vec{A}$ prin relația

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{35}$$

Într-adevăr

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) \equiv 0 \tag{36}$$

Introducem apoi $\vec{B}$ în ecuația

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

sau

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{A} = \mu_0 \vec{j} \tag{37}$$

Facem următoarea observație: relația (35) nu definește în mod unic pe $\vec{A}$ ci până la un gradient dintr-o funcție arbitrară de coordonate $f(\vec{r})$. Într-adevăr să presupunem că facem schimbarea

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla f. \tag{38}$$

Atunci $\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla f = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$.

Cum f este arbitrară înseamnă că putem impune restricții suplimentare asupra lui $\vec{A}$ (după necesități). Ecuația (37) sugerează impunerea condiției

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \tag{39}$$

numită etalonarea Coulomb. Aceasta se reduce la a alege funcția f astfel încât $\Delta f = 0$.

În acest caz din (38) avem $\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \Delta f = 0 \Rightarrow$ $\nabla \vec{A} = \nabla \vec{A}' = 0$ $\forall \vec{A}$ care face o astfel de condiție.

Ecuația (37) se scrie mai simplu acum

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \tag{37}$$

sau pe componente carteziene

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= -\mu_0 j_x \\ \Delta A_y &= -\mu_0 j_y \\ \Delta A_z &= -\mu_0 j_y \end{aligned} \tag{38}$$

Fiecare din ecuațiile de mai sus reprezintă câte o ecuație de tip Poisson pentru care știm soluția din electrostatică (avem corespondența $\varphi \leftrightarrow A_x$, $\varepsilon_0 \leftrightarrow \mu_0^{-1}$, $\rho \leftrightarrow j_x$). Pe baza acestei comparații putem scrie (vezi forma (13) a lui φ)

$$A_x(\vec{r}) = \iiint_V dv' \frac{\mu_0 j_x(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{39}$$

și similar

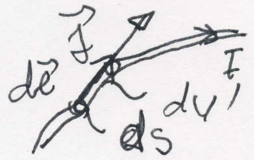
$$A_y(\vec{r}) = \iiint_V dv' \frac{\mu_0 j_y(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \quad A_z(\vec{r}) = \iiint_V dv' \frac{\mu_0 j_z(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Cele trei relații anterioare se pot scrie într-o singură relație vectorială. Așadar soluția generală pentru $\vec{A}$ este:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \iiint_V dv' \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{40}$$

Considerăm acum cazul particular al unui curent filiform de-a lungul unui conductor care are forma unei curbe arbitrare Γ.

Considerăm un element arbitrar $d\vec{l}$ pe Γ



$$|\vec{j}| = \frac{I}{dS} \Rightarrow |\vec{j}|dv' = I\frac{dv'}{dS} = I\frac{dl\,dS}{dS} = I\,dl$$

Cum $\vec{j} \uparrow\uparrow d\vec{l} \Rightarrow \vec{j}\,dv' = I\,d\vec{l}$

Acum integrala se face în lungul curbei Γ

$$A(\vec{r}) = \int_\Gamma \frac{\mu_0\, d\vec{l}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{41}$$

Cunoscând $\vec{A}(\vec{r})$ putem determina $\vec{B}(\vec{r})$ prin

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \iiint dv' \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint dv'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\times\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) \tag{42}$$

Dar $\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} +$

$$+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}^{\,3}}\left(\vec{i}\,2(x-x')+\vec{j}\,2(y-y')+\vec{k}\,2(z-z')\right) =$$

$$= -\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Obținem pentru $\vec{B}(\vec{r})$ forma generală

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint dV'\,\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{(|\vec{r}-\vec{r}\,'|)^3} \qquad (42)$$

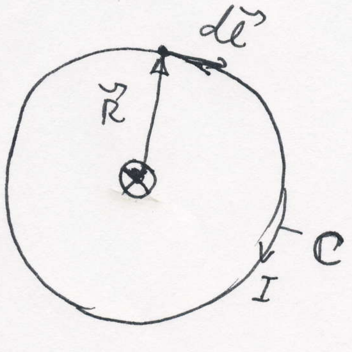
Se poate particulariza și această ecuație la un conductor filiform prin substituția amintită anterior $dV'\,\vec{J}(\vec{r}\,') \leftrightarrow I\,d\vec{l}(\vec{r}\,')$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{d\vec{l}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \qquad (43)$$

Ultima relație se numește legea **Biot-Savant-Laplace**

Exemplu:

Să determinăm $\vec{B}$ în centrul unei spire circulare de rază R



Alegem originea sistemului de coordonate în centrul spirei

$\vec{r} = 0 \quad \vec{r}\,' = \vec{R}$

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{l}(\vec{R})\times\vec{R}}{R^3}$$

$$|\vec{B}(0)| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{dl\cdot R\sin\frac{\pi}{2}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int_C dl =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\,2\pi R \Rightarrow |\vec{B}(0)| = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Sensul lui $\vec{B}$ se determină după regula produsului vectorial în cazul nostru este sensul vectorului $-d\vec{l}\times\vec{R} = \vec{R}\times d\vec{l}$

5.3. Inducția electromagnetică

Experimentele lui Faraday au pus în evidență fenomenul inducerii unei tensiuni electromotoare datorită unui flux magnetic variabil în timp.

* Tensiunea electromotoare de-a lungul unei curbe închise Γ este egală cu viteza de variație în timp (cu semn schimbat) a fluxului magnetic prin orice suprafață ce se sprijină pe Γ.

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad (44)$$

Existența unei tensiuni presupune existența unui câmp electric indus $\vec{E}$. După cum am mai analizat legătura dintre tensiune (diferență de potențial) și $\vec{E}$ putem scrie

$$e = \oint_\Gamma \vec{E}\, d\vec{l}. \qquad (45)$$

Pe de altă parte fluxul magnetic prin suprafața $\Sigma(\Gamma)$ se scrie

$$\phi_B = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{B}\cdot d\vec{S} \qquad (46)$$

Legea inducției se poate scrie acum astfel

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

sau

$$\iint_{\Sigma(\Gamma)} (\nabla\times\vec{E})\, d\vec{S} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad (47)$$

De unde obținem forma locală a legii lui Faraday (inducției electromagnetice)

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (48)$$

5.4. Ecuațiile lui Maxwell

Analizând ecuațiile electrostaticii, magnetostaticii și legea inducției electromagnetice, Maxwell a ajuns la concluzia că cele două câmpuri pot fi analizate unitar, într-o teorie unificată a câmpului electric și a câmpului magnetic numită electrodinamică clasică.

Așadar avem ecuațiile

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} \end{cases} \tag{49}$$

Chiar la prima vedere, pentru o simetrie a ecuațiilor, cum este de presupus, din ultima ecuație pare să lipsească „ceva".

Pentru a vedea acest lucru să aplicăm operația de divergență pe ultima ecuație

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0\nabla\cdot\vec{j} \tag{50}$$

Cum $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) \equiv 0 \quad \forall\,\vec{B} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{j} = 0.$ (50*)

Electrodinamica analizează și sarcinile în mișcare, nu numai cazul staționar ca electrostatica. Pe de altă parte sarcina electrică se conservă. Conservarea acesteia se poate exprima astfel. Fie V un volum în care avem o distribuție de sarcină de densitate $\rho(t,\vec{r})$. Sarcinile pot să circule acum în și din volumul considerat prin suprafața exterioară a acestuia.

Știm că $\dfrac{dQ}{dt} = I$, I- intensitatea curentului electric (care înseamnă sarcina ce trece printr-o suprafață în unitatea de timp).

Intensitatea curentului electric prin suprafața Σ ce mărginește volumul V este

$$I = \oiint_{\Sigma(V)} \vec{j}\, d\vec{S}, \quad \vec{j}\text{-densitatea de curent electric}$$

Conservarea sarcinii electrice se exprimă acum prin

$$\frac{dq}{dt} = -\oiint_{\Sigma(V)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{52}$$

Dar

$$q(t) = \iiint_V \rho(\vec{r},t)\, dV \tag{52}$$

și (51) se scrie

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{r},t)\, dV = -\oiint_{\Sigma(V)} \vec{j}\, d\vec{S} \tag{53}$$

Aplicăm în membrul drept teorema Gauss-Ostrogradski și avem

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\rho \cdot dV = -\iiint_V \nabla\vec{j}\, dV \tag{54}$$

de unde obținem forma locală a legii conservării sarcinii electrice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{55}$$

Am văzut că ecuațiile (49) ne conduc la $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ care implică $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, ori acum analizăm cazul nestaționar $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$. Avem astfel o contradicție. Aceasta arată că în ultima ecuație din (49) lipsește „ceva".

Rescriem ultima ecuație din (49) sub forma

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_d. \tag{56}$$

$\vec{j}_d$ se numește curent de deplasare, deoarece el este o consecință a lui $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, adică ρ depinde și de timp, ceea ce presupune o deplasare a sarcinilor electrice (presupusă deja). Oricum și $\vec{j} \neq 0$ presupune deplasare de sarcini (fiind definit cu ajutorul intensității curentului electric I) însă această deplasare se face în regim staționar (adică deplasarea sarcinilor electrice se face în așa fel încât densitatea de sarcină nu se modifică în timp într-un anumit punct din spațiu).

Așadar ~~termenul~~ termenul de curent de deplasare pentru $\vec{j}_d$ nu este tocmai propriu.

Aplicăm din nou operația de divergență ($\nabla\cdot$) pe ecuația (56).

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0 \nabla\cdot\vec{j} + \mu_0 \nabla\vec{j}_d \tag{56}$$

În (56) folosim acum legea conservării sarcinii electrice (55), de unde $\nabla\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$, și obținem

$$0 = -\mu_0 \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mu_0 \nabla\cdot\vec{j}_d \tag{57}$$

Din prima ecuație (49) găsim $\rho = \varepsilon_0 \nabla\vec{E}$ care introdusă în (57) conduce la

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \nabla\vec{E}) = \nabla\vec{j}_d \iff \nabla\left(\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \nabla\cdot\vec{j}_d \tag{58}$$

(Operațiile $\frac{\partial}{\partial t}$ și ∇ comută deoarece $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ și $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}$, etc - tema lui Schwartz).

Din (58) putem identifica acum termenul lipsă și anume

$$\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{59}$$

Așadar ultima ecuație din (49) devine consistentă și avem pentru aceasta forma

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{60}$$

Suntem acum în situația de a scrie complet ecuațiile fundamentale ale electrodinamicii (în vid) numite și ecuațiile lui Maxwell

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (61) \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (62) \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 & (63) \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (64) \end{cases}$$

Aceste ecuații sunt în sens general ecuații de câmp și reprezintă ecuațiile de „mișcare" în cazul electrodinamicii clasice.

prin „mișcare" în acest caz înțelegem evoluția în timp a câmpurilor. Rezolvarea acestor ecuații înseamnă determinarea câmpurilor $\vec{E}$ și $\vec{B}$ în orice punct din spațiu $(\vec{r})$ la orice moment t, adică $\vec{B}=\vec{B}(\vec{r},t)$, și $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r},t)$

Ecuațiile Maxwell sunt ecuații diferențiale cu derivate parțiale. Cunoscând distribuția de curenți $\vec{j}$ și de sarcină ρ precum și anumite condiții la limită (echivalentul condițiilor inițiale în mecanica clasică) putem în principiu determina configurația câmpului electromagnetic la orice moment: $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$.

Observație: teoriile de câmp, cum este și cazul teoriei câmpului electromagnetic (electrodinamica clasică) pot fi privite ca teorii pentru sisteme cu ~~un~~ număr infinit de grade de libertate. Am văzut că pentru un sistem cu f grade de libertate configurația sistemului la un moment dat ~~este~~ dată de coordonatele generalizate

$$q^I(t), \quad I = 1, \dots, f$$

În cazul câmpurilor $\vec{E}$ (și $\vec{B}$) putem scrie

$$\vec{E}(\vec{r},t) \overset{not}{\equiv} \vec{E}^{\vec{r}}(t) \equiv E^{i,x,y,z}(t)$$

așadar indicele $I \longleftrightarrow (i,x,y,z)$. I are f valori finite în schimb indicele „(i,x,y,z)" au o infinitate continuă de valori: $i=1,2,3$ dar $x,y,z \in (-\infty,+\infty)$.

Observație: electrodinamica clasică prin ecuațiile sale fundamentale descrie câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ într-un mod unificat

În funcție de configurațiile de curenți și densități distingem mai multe subteorii ale electrodinamicii

- în cazul staționar $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$ $(\Leftrightarrow \rho=\rho(\vec{r}))$, și $\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}=0$ $(\Leftrightarrow \vec{j}=\vec{j}(\vec{r}))$. Din $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}=0 \Rightarrow \nabla\vec{j}=0$. Din ec (64) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0 \underbrace{\nabla\vec{j}}_{=0} + \mu_0\varepsilon_0 \nabla \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0 \Rightarrow$ $\vec{E}=E(\vec{r}) \Rightarrow \overset{=0 \rightarrow}{\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0} \overset{(64)}{\Rightarrow} \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}(\vec{r}) \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t}=0$.

Așadar cazul staționar înseamnă

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \qquad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}=0 \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=0 \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0 \tag{65}$$

și ecuațiile lui Maxwell se decuplează:

- $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, și $\nabla\times\vec{E}=0$ în care apare doar $\vec{E}$ și reprezintă ecuațiile electrostaticii (vidului)
- $\nabla\cdot\vec{B}=0$ și $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ în care apare doar $\vec{B}$, și reprezintă ecuațiile magnetostaticii (vidului)

5.5. Unde electromagnetice (în vid)

Vom scrie ecuațiile lui Maxwell într-un alt caz particular, adică într-o zonă din spațiu în care $\rho=0$ și $\vec{j}=0$. Această zonă se mai numește și zona undelor electromagnetice libere (sau câmpului electromagnetic liber).

Ecuațiile lui Maxwell au acum forma

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=0 & (65) \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (66) \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 & (67) \\ \nabla\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (68) \end{cases}$$

Vom determina soluția acestor ecuații.

Aplicăm operația rotor pe ecuația (66)

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-(\nabla\cdot\nabla)\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B}) \tag{69}$$

Utilizăm acum ecuația (65) și ecuația (68) în (69)

$$-\nabla^2\vec{E}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

și obținem o ecuație pentru $\vec{E}$

$$\Delta\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \tag{70}$$

Aplicăm operația rotor ($\nabla\times$) pe ecuația (68)

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \varepsilon_0\mu_0\,\nabla\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{B}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E}) \quad (72)$$

Ținând cont de (67) și (66) obținem din (72)

$$-\nabla^2\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

și obținem o ecuație doar pentru $\vec{B}$

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (72)$$

Ecuațiile (70) și (72) se numesc ecuațiile undelor electromagnetice. (vom vedea ulterior justificarea termenului de undă).

În funcție de simetria problemei se pot alege diverse sisteme de coordonate în scrierea ecuațiilor (70) și (72).

5.5.1. Unde electromagnetice plane

Vom prezenta cazul cel mai simplu când problema are o simetrie planară. În acest caz cele mai adecvate sunt coordonatele carteziene.

Fiecare din ecuațiile (70) sau (72) reprezintă câte trei ecuații scalare pentru componentele E_x, E_y, E_z respectiv B_x, B_y, B_z și au toate aceiași formă. De aceea în loc de șase ecuații identice vom analiza o singură ecuație în care determinăm funcția $f(x,y,z,t)$ care poate fi oricare din componentele $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$. Așadar avem ecuația

$$\Delta f - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (73)$$

unde am făcut notația $c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

(vom descrie mai târziu semnificația lui c)

Deoarece avem simetrie plană ne putem alege sistemul de coordonate astfel încât $f = f(x,t)$, adică $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

Ecuația undelor (plane) (73) are acum forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad (74)$$

Pentru a rezolva această ecuație facem următoarea schimbare de variabile.

$$\xi = t - \frac{x}{c} \quad , \quad \eta = t + \frac{x}{c} \qquad (75)$$

In acest caz $f(x,t) = f(\xi(x,t), \eta(x,t))$

Rescriem ecuația (74) în coordonatele ξ și η

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{1}{c} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{1}{c}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\left(-\frac{1}{c}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}\frac{1}{c} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\frac{1}{c} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}\left(-\frac{1}{c}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}\right) \qquad (76)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial \cancel{x}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} \qquad (77)$$

Introducem (76) și (77) în (74) și avem

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}\right) = 0$$

care devine

$$-\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \qquad (78)$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = 0 \quad , \quad f = f(\xi, \eta) \qquad (79)$$

Ecuația (79) se integrează direct.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = g(\xi)$$

$$f(\xi,\eta) = \int g(\xi)\, d\xi + f_2(\eta)$$

și în final

$$f(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \qquad (80)$$

Revenind la sistemul inițial de coordonate

$$f(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right) \qquad (81)$$

f_1 și f_2 sunt funcții arbitrare. Forma acestora nu este stabilită de ecuația undelor. Această formă este determinată în faza inițială a generării undelor în zona în care există surse ρ și $\vec{j}$ cu $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \neq 0$ (numită zona radiativă)

În zona undelor, la distanța suficient de mare de surse, odată stabilită forma lui f_1 și f_2 ea rămâne neschimbată.

În zona undelor remarcăm următoarele: să presupunem că la un moment dat t_0 și o coordonată dată x_0 funcția are valoarea $f_1\left(t_0 - \frac{x_0}{c}\right) = f_0$

Evident funcția va avea aceiași valoare și în $\forall t$ și $\forall x$ pt care

$$t_0 - \frac{x_0}{c} = t - \frac{x}{c}$$

adică $\quad x = x_0 + c(t - t_0) \qquad (82)$

ultima ecuație arată o deplasare uniformă în lungul axei Ox cu viteza constantă c.

Cu alte cuvinte valoarea f_0 a funcției f_1 se propagă în sensul pozitiv al axei Ox cu viteza c. Așadar viteza c este viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid. Cum s-a dovedit că lumina este o undă electromagnetică c reprezintă chiar viteza luminii în vid (analizate fiind undele electromagnetice în vid).

O analiză similară pentru f_2 conduce

la $\quad x = x_0 - c(t - t_0) \qquad (83)$

care arată că f_2 se propagă în sens opus ~~sensului~~ axei Ox.

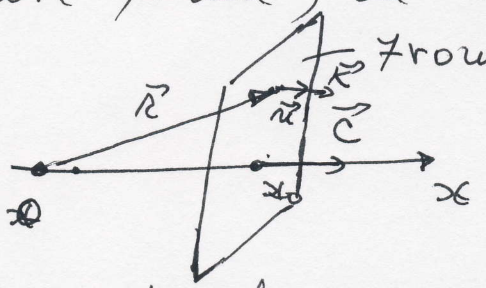
Cum f_1 și f_2 nu depind de y și z valoarea lui f_1 și f_2 este aceași $\forall$ y și z adică în tot planul paralel cu planul yOz care trece prin x.

Putem spune că $f_1(t-\frac{x}{c})$ este o undă plană **progresivă** și $f_2(t+\frac{x}{c})$ este o undă plană **regresivă**. Cum f este unica din componentele lui $\vec{E}$ sau $\vec{B}$ putem spune că undele electromagnetice plane au forma (soluții de tipul) generală:

$$\vec{B}=\vec{B}(t-\frac{x}{c}),\ \vec{B}=\vec{B}(t+\frac{x}{c})$$

$$\vec{E}=\vec{E}(t-\frac{x}{c}),\ \vec{E}=\vec{E}(t+\frac{x}{c})$$

Planul pentru care se păstrează valorile constante ale funcției f_1 sau f_2 se numește front de undă. În general frontul de undă este suprafața pe care funcția de undă ia o valoare constantă. (Frontul de undă poate avea și alte forme, de exemplu sferică).



Dacă sistemul de coordonate cartezian este ales arbitrar. Atunci $f=f(x,y,z,t)=f(\vec{r},t)$

Alegem versorul $\vec{u}$ în direcția lui $\vec{c}$. În cazul anterior $\vec{u}\equiv\vec{i}$ și $\vec{r}\cdot\vec{u}\equiv\vec{r}\cdot\vec{i}=x$ Așadar

$$t-\frac{1}{c}x \rightarrow t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{c} \quad \text{și} \quad t+\frac{1}{c}x \rightarrow t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{c}$$

$$\text{și } f_1=f_1(t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{c}),\ f_2=f_2(t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{c}) \qquad (84)$$

Așadar pentru unda progresivă din undele electromagnetice plane avem

$$\vec{B}=\vec{B}(t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{c}),\ \vec{E}=\vec{E}(t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{c}) \qquad (85)$$

5.5.2. Unde monocromatice plane

Undele electromagnetice pentru care funcțiile $\vec{B}=\vec{B}(t-\frac{\vec{r}\vec{u}}{c})$ și $\vec{E}=\vec{E}(t-\frac{\vec{r}\vec{u}}{c})$ sunt cunoscute și au formă sinusoidală se numesc unde monocromatice plane.
Cu alte cuvinte avem

$$\vec{E}=\vec{E}_0\cos\omega\left(t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{c}\right),\quad \vec{B}=\vec{B}_0\cos\omega\left(t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{c}\right) \qquad (86)$$

ω - pulsația undelor monocromatice

Deoarece $e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$ și $\mathrm{Re}\, e^{-i\alpha}=\cos\alpha$ este preferabil să se scrie $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sub formă complexă, subînțelegând că în final se ia partea reală a expresiilor obținute. Așadar

$$\vec{E}=\vec{E}_0\, e^{-i\omega(t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{c})},\quad \vec{B}=\vec{B}_0\, e^{-i\omega(t-\frac{\vec{r}\vec{u}}{c})} \qquad (87)$$

Prelucrăm exponentul:

$$\omega\left(t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{c}\right)=\omega t-\vec{r}\cdot\frac{\vec{u}\omega}{c}$$

Definim vectorul de undă prin

$$\vec{k}=\frac{\omega}{c}\vec{u},\quad |\vec{k}|=\frac{\omega}{c} \qquad (88)$$

$$\Rightarrow\quad \omega\left(t-\frac{\vec{r}\vec{u}}{c}\right)=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}$$

Deoarece cos este o funcție periodică avem:
Fixăm $\vec{r}\cdot\vec{u}\equiv x_0$

$$\cos\omega\left(t-\frac{x_0}{c}\right)=\cos\left(\omega\left(t-\frac{x_0}{c}\right)+2\pi\right)=$$
$$=\cos\left(\omega(t+T)-\frac{x_0}{c}\right)$$

$\Rightarrow \omega T=2\pi \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}$ - perioada undei

$\nu=\frac{1}{T}$ este frecvența undei

Pe de altă parte avem ($\vec{r}\cdot\vec{u}\equiv x$)

$$\cos\omega\left(t+T-\frac{x}{c}\right)=\cos\omega\left(t-\frac{x+\lambda}{c}\right)$$

(λ - perioada undei) de unde

$$\omega\left(T-\frac{\lambda}{c}\right)=0\ \Rightarrow\ T=\frac{\lambda}{c}\ \Rightarrow\ \lambda=cT$$

$$k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{cT}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

Așadar pentru undele plane monocromatice avem

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \tag{89}$$

5.5.3. Transversalitatea undelor plane monocromatice

$\vec{E}$ și $\vec{B}$ de forma (89) fiind soluții ale ecuațiilor lui Maxwell (în absența surselor) trebuie să le verifica pe acestea.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{90}$$

$$\nabla \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \vec{E}_0 \cdot \nabla e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} =$$

$$= \vec{E}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \nabla(-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})) =$$

$$= \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \cdot \nabla(i\vec{k}\vec{r}) = i\vec{E} \cdot \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$(k_x x + k_y y + k_z z) = i\vec{E}(\vec{i}k_x + \vec{j}k_y + \vec{k}k_z) =$$

$$= i\vec{k} \cdot \vec{E}$$

Așadar $\nabla \vec{E} = 0 \iff i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ de unde obținem $\vec{E} \perp \vec{k}$ adică $\vec{E}$ este perpendicular pe direcția de propagare.

Similar din $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ și deci $\vec{B} \perp \vec{k}$ adică și $\vec{B}$ este perpendicular pe direcția de propagare.

Analizăm acum ecuația

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{91}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -\vec{E}_0 \times \nabla e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$= -\vec{E}_0 \times e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \nabla(-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})) = \tag{92}$$

$$= -\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \times i\vec{k} = i\vec{k} \times \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \frac{\partial}{\partial t}(-i(\omega t - \vec{k}\vec{r}))$$

$$= \vec{B}(-i\omega) = -i\omega\vec{B} \tag{93}$$

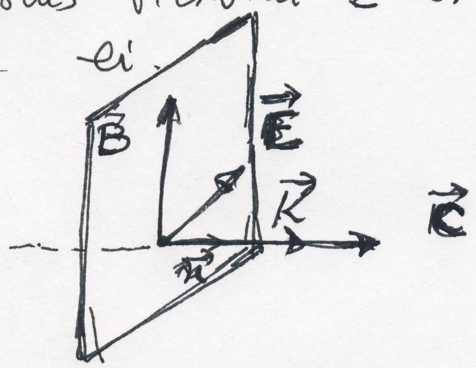
Introducând (93) și (92) în (91) avem

$$i(\vec{K}\times\vec{E}) = +i\omega\vec{B}$$

sau $$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{K}\times\vec{E} = -\frac{1}{\omega}\vec{E}\times\vec{K} \qquad (94)$$

Constatăm așadar că $\vec{B}$ este perpendicular și pe $\vec{E}$.

Așadar undele electromagnetice plane sunt perpendiculare pe direcția de propagare (transversale). În plus vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt perpendiculari între ei.



Relația (94) mai poate fi scrisă și astfel

$\vec{K} = \frac{\omega\cdot\vec{n}}{c}$ $$\vec{B} = -\frac{1}{\omega}\vec{E}\times\frac{\omega\vec{n}}{c} = -\frac{1}{c^2}\vec{E}\times c\vec{n} = -\frac{1}{c^2}\vec{E}\times\vec{c}$$

adică $$\vec{B} = -\frac{1}{c^2}(\vec{E}\times\vec{c}) \text{ sau } B = \frac{1}{c^2}(\vec{c}\times\vec{E}) \qquad (95)$$

sau $$\vec{c}\times\vec{B} = -\frac{1}{c^2}(\vec{c}\times(\vec{E}\times\vec{c})) = -\frac{1}{c^2}(\vec{E}(\vec{c}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{E}\cdot\vec{c}))$$

$\vec{E}\perp\vec{K} \Rightarrow \vec{E}\perp\vec{c}$ și avem $\vec{E}\cdot\vec{c} = 0$

$$-\vec{c}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{E}c^2, \text{ adică}$$

$$\vec{E} = -(\vec{c}\times\vec{B}) \text{ sau } \vec{E} = \vec{B}\times\vec{c} \qquad (96)$$

5.5.4 Energia undelor electromagnetice

Pornim de la ecuațiile lui Maxwell în cazul undelor ($\rho = 0$ $\vec{j} = 0$)

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \qquad (97)$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (98)$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad (99)$$

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \equiv \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (100)$$

Determinăm următoarea expresie

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}+\varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \overset{(98)}{\underset{(100)}{=}} -\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E})+\varepsilon_0\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2\right)=-\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}(\nabla\times\vec{B})\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2+\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2\right)=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) \qquad (111)$$

Notăm

$$w=\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}+\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 \qquad (112)$$

și

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) \qquad (113)$$

se numește vector Pointing.

Ecuația (111) se scrie acum sub forma

$$\frac{\partial}{\partial t}w+\nabla\cdot\vec{S}=0 \qquad (114)$$

Ecuația (114) este o ecuație tipică de conservare a mărimii W (similar cu ecuația de conservare a sarcinii sau a masei), w fiind densitatea mărimii W

W - reprezintă energia undei electromagnetice iar w densitatea volumică a acesteia

Vectorul Pointing $\vec{S}$ reprezintă curentul de energie electromagnetică, adică cantitatea de energie electromagnetică ce trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafață perpendiculară pe $\vec{S}$.

Pentru a vedea mai clar cele expuse anterior vom integra ecuația (114) pe un volum V

$$\iiint_V dV\frac{\partial w}{\partial t}=-\iiint_V dV\,\nabla\cdot\vec{S}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_V dV\,w\right)=-\oiint_{\Sigma(V)}\vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}$$

$$\frac{d}{dt}W=-\Phi_e\,,\quad \Phi_e \text{ fluxul lui } \vec{S} \text{ prin } \Sigma$$

adică scăderea energiei electromagnetice în V se datorează fluxului de energie prin suprafaţa Σ ce mărgineşte acest volum.

În densitatea de energie electromagnetică distingem doi termeni.

$$w_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2$$ – densitatea de energie electrică

şi $$w_m = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$ – densitatea de energie magnetică

Cei doi termeni sunt egali pentru undele plane monocromatice. Într-adevăr

$$\vec{E}^2 = E^2 \qquad E = |\vec{E}| = |\vec{c}\times\vec{B}| = c\cdot B \sin\frac{\pi}{2} = cB$$

$$w_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = w_m$$

Vectorul Poynting în cazul undelor plane monocromatice este

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = -\frac{1}{\mu_0}((\vec{c}\times\vec{B})\times\vec{B}) =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\times(\vec{c}\times\vec{B})) = \frac{1}{\mu_0}(\vec{c}\vec{B}^2 - \vec{B}(\underbrace{\vec{B}\cdot\vec{c}}_{=0})) = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\vec{c}$$

De unde

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}B^2\vec{c} = \frac{1}{\mu_0}B^2 c\cdot\vec{n} = \frac{1}{\mu_0}B^2 c\,\frac{c}{\omega}\vec{k} = \frac{B^2c^2}{\omega}\vec{k}$$

adică transferul de energie se face în cazul undei plane monocromatice pe direcţia de propagare (cum este de aşteptat)